626. topological group ノ微分可能性ニ就テ

吉田　耕作（阪大）

I. 距離付ケラレタ環 R ニ横ハル群 $\mathfrak{G}$ ガ Lie 群ナル為ニ必要且充分ナ條件ハ

α）　$\mathfrak{G}$ ガ komplete デアリ

β）　$\mathfrak{G}$ ガ　微分可能且ツ

γ）　$\mathfrak{G}$ ノ Lie-ring ガ有限次元

ニヨツテ與ヘラレ且ツ之レ等ノ三條件ハ $\mathfrak{G}$ ノ local compactnessトequivalentナコトヲ先ニ得タ。（談話 280, 291, 298, 337）。

コヽニ$\mathfrak{G}$ガkompleteト云フノハ$\mathfrak{G}$ノfundamentalfolge $\{T_i\}$, $\lim T_i T_j^{-1}=E$, ガ$\lim T_i^{-1}T=E$ナル如キ$\mathfrak{G}$ノelement Tヲ定メルコト。

$\mathfrak{G}$ガ微分可能ト云フノハ$T_i \neq E$, $\lim T_i = E$ナルゴトキ$\mathfrak{G}$ノFolge $\{T_i\}$ニ對シ，適當ニ実數列 $\{\varepsilon_{i'}\}$, $\varepsilon_{i'} \neq 0$, ト$\{T_i\}$ノ適當ナ部分列$\{T_{i'}\}$ヲ撰ベバ

$$\lim_{i'\to\infty} \frac{T_{i'}-E}{\varepsilon_{i'}} = U\,(\neq 0) \in R$$

ナルコトデアル。上ノ如クシテ得ラレル微分係數Uノ全体ニ，Rノ0ヲ付ケ加ヘタモノヲ$\mathfrak{T}$トスレバ$\mathfrak{T}$ハ

$X, Y \in \mathfrak{T}$ナラバ

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{T}$$

ナル如キreal linear spaceデアル。コノ$\mathfrak{T}$ヲ$\mathfrak{G}$ノLie ringト呼ブ。

ココニハβ)カラγ)ノ出ルコトヲ示シタイ。即チβ)ハ既ニ$\mathfrak{G}$ニ對スル“compactness”ノ要求ニナッテヰルノデアル。

証明．$\lim(T_{i'}-E)/\varepsilon_{i'} = U$カラ $\lim|T_{i'}-E|/|\varepsilon_{i'}| = |U| \neq 0, \infty$ヲ得ルカラ $\lim(T_{i'}-E)/|T_{i'}-E| = U/|U|$。即チ$\mathfrak{G}$ガ微分可能ト云フコトハ$T_i \neq E$, $\lim T_i = E$ナル如キ$\mathfrak{G}$ノFolge

$\{T_i\}$ ニ對シ $\mathfrak{R}$ ノ Folge $\{\pm(T_i-E)/|T_i-E|\}$ ガ compact ト云フコトデアル。

今 $\mathfrak{G}$ ガ微分可能トシ且ツ $\mathfrak{G}$ ノ Lie-ring $\mathfrak{T}$ ガ有限ナ Base ヲモタナイトスル。然ラバ $\mathfrak{T}$ ハ real linear space ダカラ，induction ニヨリ，

$$|\mathfrak{V}_i|=1,\quad |\mathfrak{V}_i-\mathfrak{V}_j|\geqq\frac{1}{2}\quad for\quad i\neq j$$

ナルゴトキ $\mathfrak{T}$ ノ無限部分列 $\{\mathfrak{V}_i\}$ ガ存在シナケレバナラナイ。

微分係数ノ定義ト $|\mathfrak{V}_i|=1$ ニヨリ

$$\left|\frac{T_i-E}{\pm|T_i-E|}-\mathfrak{V}_i\right|\leqq\frac{1}{i}\quad\left(\text{符号}\pm\text{ハ } i \text{ ニ depend シテドチラカトル}\right)$$

ナル如キ $\mathfrak{G}$ ノ Folge $\{T_i\}$，$T_i\neq E$, $\lim T_i=E$ ガ存在スル筈デアル。

然シ $|\mathfrak{V}_i-\mathfrak{V}_j|\geqq\frac{1}{2}$ for $i\neq j$ ニヨリ $\mathfrak{R}$ ノ Folge $\{(T_i-E)/|T_i-E|\}$ ハ compact デナイ。之ハ $\mathfrak{G}$ ノ微分可能性ニ反スル。 —— 以上 ——

II. 上ノ結果ハ n ー次元 euclid 空間 $\mathcal{E}$ ニ於ケル解析変換 $M\to M'$ ノ topological group-germ ニモ應用デキル。

即チ $\mathcal{O}$ ヲ $\mathcal{E}$ ノ領域トスルトキ変換

$$M\to M',\quad M'=\varphi(M)\quad (M\in\mathcal{O},\ M'\in\mathcal{E})$$

ハ点 M' ノ坐標 $\varphi^1(M)$, -------, $\varphi^n(M)$ ガ点 M ノ坐標 M^1, -------, M^n ノ解析函数ナルトキニ解析変換ト呼バレル。

$\mathfrak{D}$デ定義サレタ二ツノ解析変換T, Sノ距離ヲ

$$d(\mathfrak{D}_1, T, S) = \max_{M \in \mathfrak{D}_1} |T(M) - S(M)|$$

ニヨツテ定義スル。コヽニ$\mathfrak{D}_1$ハ$\mathfrak{D}$ノ内部ニ横ハル *fixed closed domain* トシ，一般ニ$|T(M) - S(M)|$ハ$T(M) - S(M)$ノ坐標ノ max ヲ表ハス。

偖テ$\mathfrak{G}$ガ$\mathfrak{D}$デ定義サレタ解析変換ノ集合デ距離$d(\mathfrak{D}_1, T, S)$ニヨツテ *topological group-germ* デアルトスル。

$\mathfrak{G}$ノ微分可能性ヲ次ノゴトク定メル。T_iヲ$d(\mathfrak{D}_1, T_i, E) \neq 0$, $\lim d(\mathfrak{D}_1, T_i, E) = 0$ナル如キ$\mathfrak{G}$ノ *Folge* トスレバ，適當ナ *Teilfolge* $\{T_{i'}\}$及ビ實数列$\{\varepsilon_{i'}\}$, $\varepsilon_{i'} \neq 0$ヲトレバ$\mathfrak{D}_1$ノ内部デ一様ニ

$$\lim \frac{T_{i'}(M) - M}{\varepsilon_{i'}} = \psi(M) \neq 0$$

ガ成立スル（*Montel* 式收斂）。コヽニ收斂ト云フノハ各坐標ノ收斂スルコト，又$\psi(M) \neq 0$ト云フノハ$\psi(M)$ノドレカ一ツノ坐標$\neq 0$ナルコトデアル。

上ノ如クシテ得ラレル$\psi(M)$（$\mathfrak{D}_1$ノ内部デ定義サレタ解析函数 n コノ *system*）ヲ$\mathfrak{G}$ノ微分係数ト名ヅケル。$\mathfrak{G}$ノ微分係数全体ニ$\psi(M) \equiv 0$ヲ付ケ加ヘタモノヲ$\mathfrak{G}$ノ *Lie-ring* ト呼ブ。

併テ H. Cartan ニヨレバ (Actuarites Sc. et industrielles 198) $\mathfrak{G}$ ガ locally euclidian of finite dimension デ且ツ微分可能 (Cartan ハ $\mathfrak{G}$ ガ propriété [P] ヲ満足スルト云ッテヰル) ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ Lie ノ group-germ デアル。

所ガ Cartan ノ証明ヲ讀ンデミルト l. e. of finite d. ト云フ條件ハ

α) $\mathfrak{G}$ ガ komplete

β) $\mathfrak{G}$ ノ Lie-ring $\mathfrak{T}$ ガ有限次元

ト云フコトニシカ使ッテヰナイ。

コヽニ $\mathfrak{G}$ ガ komplete ト云フノハ $d(\mathcal{O}_1, T_i, T_j) = 0$ ナルゴトキ $\mathfrak{G}$ ノ Folge $\{T_i\}$ ハ $d(\mathcal{O}_1, T_i, T) = 0$ ナルゴトキ $\mathfrak{G}$ ノ変換 T ヲ定メルコトデアル。

又 Cartan ニヨレバ (p.34) $\mathfrak{G}$ ガ komplete ナラバ $\mathfrak{T}$ ハ real linear space デアル。故ニ I ト全ク同様ニシテ α) 及ビ $\mathfrak{G}$ ノ微分可能性カラ β) ガ出ル。

即チ $\mathfrak{G}$ ガ Lie group-germ ナタメノ必充條件ハ kompleteness ト微分可能性ニヨッテ與ヘラレル。

何レニシテモ次元假定ヲ表面ニ現ハサズニスム譯デス。